ساختار هامیلتونی نسبیت عام
در فرمول‌بندی ویل‌بینِ ADM

علیرضا فرجی

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده‌ی فیزیک

۲۰ دی ۱۴۰۲

۱. مقدمه
۲. پایه‌ی غیر مختصاتی
   - هموستار اسپین
۳. کنش اینشتین-هیلبرت و کنش هیلبرت-پالاتینی
۴. فرمول‌بندی (۳+۱)
   - مشتق هموردا و انحنای بیرونی در ابرسطح
   - معادلات گاوس-کودازی
۵. کنش گرانشی در فرم (۳+۱)
   - کنش S_{ADM}
۶. فرمول‌بندی (۳+۱) با ویل‌بین
   - نگاهی دقیق‌تر به ویل‌بین
۷. طرح مسئله و حل آن
   - تکانه‌ی ${\pi^i}_a$
   - تکانه‌ی k^a
   - کروشه‌پواسون‌های اساسی و نمادهای مورد استفاده
   - سه قید M_{ab}
   - سه قید L_{ab}
   - سه قید L_{0a}
۸. توضیحاتی در ادامه‌ی پروژه

مقدمه

مقدمه

در اینجا امضای متریک $(-+++)$ است. نمادگذاری‌ها در بخش‌های مختلف توضیح داده شده است.

مقدمه

در اینجا امضای متریک $(+++-)$ است. نمادگذاری‌ها در بخش‌های مختلف توضیح داده شده است.

میدان‌های ویل‌بین ، هموستار فضای خم ، هموستار اسپین ، معادله‌ی اینشتین ، کنش اینشتین–هیلبرت و کنش هیلبرت–پالاتینی از مفاهیم مهم در گرانش و ابرگرانش است.

مقدمه

در اینجا امضای متریک $(-+++)$ است. نمادگذاری‌ها در بخش‌های مختلف توضیح داده شده است.

میدان‌های ویل‌بین ، هموستار فضای خم ، هموستار اسپین ، معادله‌ی اینشتین ، کنش اینشتین–هیلبرت و کنش هیلبرت–پالاتینی از مفاهیم مهم در گرانش و ابرگرانش است.

کنش اینشتین–هیلبرت تابعی از تانسور انحنا با دو اندیس تخت است. تانسور انحنا نیز تابعی از هموستار اسپین و هموستار اسپین نیز تابعی از ویل‌بین است.

مقدمه

در اینجا امضای متریک $(-+++)$ است. نمادگذاری‌ها در بخش‌های مختلف توضیح داده شده است.

میدان‌های ویل‌بین ، هموستار فضای خم ، هموستار اسپین ، معادله‌ی اینشتین ، کنش اینشتین-هیلبرت و کنش هیلبرت-پالاتینی از مفاهیم مهم در گرانش و ابرگرانش است.

کنش اینشتین-هیلبرت تابعی از تانسور انحنا با دو اندیس تخت است. تانسور انحنا نیز تابعی از هموستار اسپین و هموستار اسپین نیز تابعی از ویل‌بین است.

در کنش هیلبرت-پالاتینی ، هموستار اسپین میدانی مستقل است.

مقدمه

در اینجا امضای متریک $(-+++)$ است. نمادگذاری‌ها در بخش‌های مختلف توضیح داده شده است.

میدان‌های ویل‌بین ، هموستار فضای خم ، هموستار اسپین ، معادله‌ی اینشتین ، کنش اینشتین-هیلبرت و کنش هیلبرت-پالاتینی از مفاهیم مهم در گرانش و ابرگرانش است.

کنش اینشتین-هیلبرت تابعی از تانسور انحنا با دو اندیس تخت است. تانسور انحنا نیز تابعی از هموستار اسپین و هموستار اسپین نیز تابعی از ویل‌بین است.

در کنش هیلبرت-پالاتینی ، هموستار اسپین میدانی مستقل است.

بررسی کنش گرانشی در تحلیل هامیلتونی نیاز به فرمول‌بندی (۳+۱) یا ADM دارد. در این حالت ، فضا-زمان چهار بعدی به صورت فضای سه بعدی (ابرسطح) و زمان تقسیم‌بندی می‌شود.

مقدمه

در اینجا امضای متریک $(-+++)$ است. نمادگذاری‌ها در بخش‌های مختلف توضیح داده شده است.

میدان‌های ویل‌بین ، هموستار فضای خم ، هموستار اسپین ، معادله‌ی اینشتین ، کنش اینشتین-هیلبرت و کنش هیلبرت-پالاتینی از مفاهیم مهم در گرانش و ابرگرانش است.

کنش اینشتین-هیلبرت تابعی از تانسور انحنا با دو اندیس تخت است. تانسور انحنا نیز تابعی از هموستار اسپین و هموستار اسپین نیز تابعی از ویل‌بین است.

در کنش هیلبرت-پالاتینی ، هموستار اسپین میدانی مستقل است.

بررسی کنش گرانشی در تحلیل هامیلتونی نیاز به فرمول‌بندی (۳+۱) یا ADM دارد. در این حالت ، فضا-زمان چهار بعدی به صورت فضای سه بعدی (ابرسطح) و زمان تقسیم‌بندی می‌شود.

در فرمول‌بندی ADM ، مشتق هموردا در ابرسطح ، انحنای بیرونی و دسته معادلات گاوس-کودازی اهمیت بسیاری دارند. دسته معادلات گاوس-کودازی روابطی میان انحنای فضا-زمان چهاربعدی و انحنای ابرسطح هستند.

کنش گرانشی در فرمول‌بندی (۳+۱) منجر به تعیین کنش S_{ADM} می‌شود. قیود وابرریختی دستگاه با استفاده از کنش S_{ADM} و همچنین با تحلیل هامیلتونی به دست می‌آیند. قیود وابسته به دوران نیز تعیین شده و جبر مولدهای دوران برای آن‌ها برقرار است.

کنش گرانشی در فرمول‌بندی (۳+۱) منجر به تعیین کنش S_{ADM} می‌شود. قیود وابرریختی دستگاه با استفاده از کنش S_{ADM} و همچنین با تحلیل هامیلتونی به دست می‌آیند. قیود وابسته به دوران نیز تعیین شده و جبر مولدهای دوران برای آن‌ها برقرار است.

در فضای چهار بعدی مؤلفه‌های ویل‌بین ۱۶ مؤلفه دارد در حالی که متریک ۱۰ مؤلفه مستقل دارد. این ۶ درجه آزادی پیمانه‌ای مربوط به تبدیلات موضعی لورنتس است.

کنش گرانشی در فرمول‌بندی (۳+۱) منجر به تعیین کنش S_{ADM} می‌شود. قیود وابرریختی دستگاه با استفاده از کنش S_{ADM} و همچنین با تحلیل هامیلتونی به دست می‌آیند. قیود وابسته به دوران نیز تعیین شده و جبر مولدهای دوران برای آن‌ها برقرار است.

در فضای چهار بعدی مؤلفه‌های ویل‌بین ۱۶ مؤلفه دارد در حالی که متریک ۱۰ مؤلفه مستقل دارد. این ۶ درجه آزادی پیمانه‌ای مربوط به تبدیلات موضعی لورنتس است.

با ویل‌بین بالا مثلثی تقارن موضعی لورنتس به طور کامل نشان داده نمی‌شود و فقط تقارن دورانی دیده می‌شود. علت آن است که ۱۶ مؤلفه‌ی ویل‌بین برحسب ۱۳ میدان تعریف می‌شوند. به عبارت دیگر مانند آن است که بر روی مؤلفه‌های ویل‌بین نوعی محدودیت یا تثبیت پیمانه‌ای انجام شده باشد.

کنش گرانشی در فرمول‌بندی (۳+۱) منجر به تعیین کنش S_{ADM} می‌شود. قیود وابرریختی دستگاه با استفاده از کنش S_{ADM} و همچنین با تحلیل هامیلتونی به دست می‌آیند. قیود وابسته به دوران نیز تعیین شده و جبر مولدهای دوران برای آن‌ها برقرار است.

در فضای چهار بعدی مؤلفه‌های ویل‌بین ۱۶ مؤلفه دارد در حالی که متریک ۱۰ مؤلفه مستقل دارد. این ۶ درجه آزادی پیمانه‌ای مربوط به تبدیلات موضعی لورنتس است.

با ویل‌بین بالا مثلثی تقارن موضعی لورنتس به طور کامل نشان داده نمی‌شود و فقط تقارن دورانی دیده می‌شود. علت آن است که ۱۶ مؤلفه‌ی ویل‌بین برحسب ۱۳ میدان تعریف می‌شوند. به عبارت دیگر مانند آن است که بر روی مؤلفه‌های ویل‌بین نوعی محدودیت یا تثبیت پیمانه‌ای انجام شده باشد.

شکل بدون محدودیت ویل‌بین را می‌توان به شکل ۱۶ مؤلفه‌ی مستقل تعریف کرد. حال سؤال این است که آیا در شکل بدون محدودیت مؤلفه‌های ویل‌بین در فرمول‌بندی ADM می‌توان تقارن موضعی لورنتس را به طور کامل نشان داد؟ این همان سؤالی است که به دنبال جواب آن بودم.

کنش گرانشی در فرمول‌بندی (۳+۱) منجر به تعیین کنش S_{ADM} می‌شود. قیود وابرریختی دستگاه با استفاده از کنش S_{ADM} و همچنین با تحلیل هامیلتونی به دست می‌آیند. قیود وابسته به دوران نیز تعیین شده و جبر مولدهای دوران برای آن‌ها برقرار است.

در فضای چهار بعدی مؤلفه‌های ویل‌بین ۱۶ مؤلفه دارد در حالی که متریک ۱۰ مؤلفه مستقل دارد. این ۶ درجه آزادی پیمانه‌ای مربوط به تبدیلات موضعی لورنتس است.

با ویل‌بین بالا مثلثی تقارن موضعی لورنتس به طور کامل نشان داده نمی‌شود و فقط تقارن دورانی دیده می‌شود. علت آن است که ۱۶ مؤلفه‌ی ویل‌بین برحسب ۱۳ میدان تعریف می‌شوند. به عبارت دیگر مانند آن است که بر روی مؤلفه‌های ویل‌بین نوعی محدودیت یا تثبیت پیمانه‌ای انجام شده باشد.

شکل بدون محدودیت ویل‌بین را می‌توان به شکل ۱۶ مؤلفه‌ی مستقل تعریف کرد. حال سؤال این است که آیا در شکل بدون محدودیت مؤلفه‌های ویل‌بین در فرمول‌بندی ADM می‌توان تقارن موضعی لورنتس را به طور کامل نشان داد؟ این همان سؤالی است که به دنبال جواب آن بودم.

انتظار می‌رفت که جواب مثبت باشد که همین‌طور نیز شد. برای رسیدن به نتیجه‌ی مورد نظر از شکل کنش گرانشی بر حسب ویل‌بین در فرمول‌بندی (۳+۱) تکانه‌های همیوغ متناظر را تعیین کرده و قیود مسئله را به دست آوردم. نشان دادم که این قیود جبر لورنتس را به‌طور کامل برآورده می‌کنند.

پایه‌ی غیر مختصاتی

پایه‌ی غیر مختصاتی

- در خمینه‌ی M در هر نقطه‌ی P ، در فضای مماس T_p و فضای دوگان مماس T_p^*

$$\hat{e}_{(\mu)} = \partial_\mu$$

$$\hat{\theta}^{(\mu)} = \mathrm{d}x^\mu$$

- پایه‌ی برداری غیر مختصاتی $\hat{e}_{(a)}$ **(تتراد یا ویل‌بین)** در هر نقطه

$$\hat{e}_{(\mu)} = e_\mu{}^a \hat{e}_{(a)} \tag{۱.۲}$$

$$\hat{e}_{(a)} = e^\mu{}_a \hat{e}_{(\mu)} \tag{۲.۲}$$

$$\hat{\theta}^{(c)} = e_\nu{}^c \hat{\theta}^{(\nu)} \tag{۳.۲}$$

$$\eta_{ab} = g_{\mu\nu} e^\mu{}_a e^\nu{}_b \tag{۴.۲}$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_\mu{}^a e_\nu{}^b \tag{۵.۲}$$

$$e_\mu{}^a e^\mu{}_b = \delta^a_b \quad , \quad e_\mu{}^a e^\nu{}_a = \delta^\nu_\mu \tag{۶.۲}$$

☜ حروف یونانی برای اندیس‌های خم (پایه مختصاتی)

☜ حروف انگلیسی برای اندیس‌های تخت (پایه غیر مختصاتی)

- رابطه‌ی بین g (دترمینان متریک $g_{\mu\nu}$) و e (دترمینان ${e_\mu}^a$)

$$\sqrt{-g} = e \tag{۷.۲}$$

- مثالی از تبدیل اندیس‌های تخت و خم به یکدیگر

$$T^{ab}{}_c = {e_\mu}^a T^{\mu b}{}_c = {e_\mu}^a {e_\nu}^b T^{\mu\nu}{}_c = {e_\mu}^a {e_\nu}^b {e^\rho}_c T^{\mu\nu}{}_\rho \tag{۸.۲}$$

- مثالی از تبدیل تانسور آمیخته

$$X^{a'\mu'}{}_{b'\nu'} = \Lambda^{a'}{}_a \Lambda^b{}_{b'} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} X^{a\mu}{}_{b\nu} \tag{۹.۲}$$

- مشتق هموردا در فضای خم برای مؤلفه‌ی تانسور $X^\mu{}_\nu$

$$\nabla_\rho X^\mu{}_\nu = \partial_\rho X^\mu{}_\nu + \Gamma^\mu_{\rho\lambda} X^\lambda{}_\nu - \Gamma^\lambda_{\rho\nu} X^\mu{}_\lambda \tag{۱۰.۲}$$

در این رابطه $\Gamma^\lambda_{\rho\nu}$ را **هموستار** گویند.

- هموستار منطبق بر متریک (**نماد کریستوفل**)

$$\Gamma^\lambda_{\rho\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\rho g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\rho} - \partial_\sigma g_{\rho\nu} \quad , \quad \Gamma^\lambda_{\rho\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\rho} \tag{۱۱.۲}$$

- تعریف تانسور پیچش

$$T^\lambda{}_{\rho\nu} = \Gamma^\lambda_{\rho\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\rho} \tag{۱۲.۲}$$

هموستار منطبق بر متریک بدون پیچش است.

- مشتق هموردای مؤلفه‌ی تانسوری $X^a{}_b$

$$\nabla_\mu X^a{}_b = \partial_\mu X^a{}_b + \omega_\mu{}^a{}_c X^c{}_b - \omega_\mu{}^c{}_b X^a{}_c \tag{۱۳.۲}$$

$\omega_\mu{}^a{}_c$ **همومستار اسپین** (پاد متقارن نسبت به دو اندیس تخت)

- روابط میان همومستار و همومستار اسپین

$$\Gamma^\nu_{\mu\lambda} = e^\nu{}_a \partial_\mu e_\lambda{}^a + e^\nu{}_a e_\lambda{}^b \omega_\mu{}^a{}_b \tag{۱۴.۲}$$

$$\omega_\mu{}^c{}_d = e_\nu{}^c e^\lambda{}_d \Gamma^\nu_{\mu\lambda} - e^\lambda{}_d \partial_\mu e_\lambda{}^c \tag{۱۵.۲}$$

- **اصل موضوعه‌ی تتراد**

$$\nabla_\mu e_\lambda{}^c = \nabla_\mu e^\lambda{}_c = 0 \tag{۱۶.۲}$$

- مؤلفه‌ی تانسوری پیچش با اندیس‌های آمیخته‌ی دو اندیس خم و یک اندیس تخت

$$T^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu e_\nu{}^a - \partial_\nu e_\mu{}^a + \omega_\mu{}^a{}_b e_\nu{}^b - \omega_\nu{}^a{}_b e_\mu{}^b \tag{۱۷.۲}$$

- مؤلفه‌ی تانسور آمیخته‌ی انحنای ریمان با دو اندیس تخت و دو اندیس خم

$$R^a{}_{b\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu{}^a{}_b - \partial_\nu \omega_\mu{}^a{}_b + \omega_\mu{}^a{}_c \omega_\nu{}^c{}_b - \omega_\nu{}^a{}_c \omega_\mu{}^c{}_b \tag{۱۸.۲}$$

کنش اینشتین-هیلبرت و کنش هیلبرت-پالاتینی

کنش اینشتین-هیلبرت و کنش هیلبرت-پالاتینی

چگالی لاگرانژی اینشتین-هیلبرت بر حسب ویل‌بین

$$\mathcal{L}_{EH} = e e^{\alpha}{}_{a} e^{\beta}{}_{b} R^{ab}{}_{\alpha\beta}(\omega(e)) \tag{۱.۳}$$

کنش اینشتین-هیلبرت و کنش هیلبرت-پالاتینی

چگالی لاگرانژی اینشتین-هیلبرت بر حسب ویل‌بین

$$\mathcal{L}_{EH} = e e^{\alpha}{}_{a} e^{\beta}{}_{b} R^{ab}{}_{\alpha\beta}(\omega(e)) \tag{۳.۱}$$

چگالی لاگرانژی هیلبرت-پالاتینی

$$\mathcal{L}_{HP} = e e^{\alpha}{}_{a} e^{\beta}{}_{b} R^{ab}{}_{\alpha\beta}(\omega_{\gamma}{}^{cd}) \tag{۳.۲}$$

فرمول‌بندی (۳+۱)

فرمول‌بندی (۳+۱)

فرمول‌بندی (۳+۱)

تقسیم فضا-زمان به متغیرهای دینامیکی فضایی و زمانی با حفظ ساختار هندسی نظریه

فرمول‌بندی (۳+۱)

فرمول‌بندی (۳+۱)

تقسیم فضا-زمان به متغیرهای دینامیکی فضایی و زمانی با حفظ ساختار هندسی نظریه

- میدان اسکالر $t(x^\alpha)$ ($t =$ ثابت) خانواده‌ای از ابرسطح‌های فضاگونه‌ی غیر متقاطع در فضا-زمان با مولفه‌های بردار عمود بر سطح n_α

$$n_\alpha \propto \partial_\alpha t$$

- مختصات فضایی y^i در ابر سطح $\Sigma(t)$ (t پارامتر مشخص کننده‌ی سطح)
- منحنی‌های متقاطع با ابرسطح‌های فضاگونه نگاشتی از رویدادها از یک ابرسطح به ابرسطح دیگر هستند. برای مختصات چهار بعدی $x^\alpha(t, y^i)$

$$t^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial t}$$

t^α مؤلفه‌های بردار مماس برمنحنی با شرط قیدی

$$t^\alpha \partial_\alpha t = 1$$

- تصویری به ابرسطح $\hat{h}^\alpha_i = \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial y^i}$

$$\hat{h}^\alpha_i n_\alpha = 0$$

- برای بردار واحد n_α و بردار t^α

$$n_\alpha = -N\partial_\alpha t \quad (۱.۴)$$

$$t^\alpha = Nn^\alpha + N^i \hat{h}^\alpha_i \quad (۲.۴)$$

$$n_\alpha n^\alpha = -1 \quad (۳.۴)$$ در ابرسطح فضاگونه

N را اُفت (lapse) و N^i ها را انتقال یا جابجایی(shift) گویند.

- با تبدیل مختصات ، متریک و معکوس متریک تفکیک شده‌ی فضایی و زمانی عبارتند از

$$g_{00} = N^i N_i - N^2 \qquad g_{0i} = N_i \qquad g_{ij} = h_{ij} = g_{\alpha\beta}\hat{h}^\alpha_i \hat{h}^\beta_j \quad (۴.۴)$$

$$g^{00} = -N^{-2} \qquad g^{0i} = N^{-2}N^i \qquad g^{ij} = h^{ij} - N^{-2}N^i N^j \quad (۵.۴)$$

- h دترمینان متریک فضایی h_{ij}

$$\sqrt{-g} = N\sqrt{h} \quad (۶.۴)$$

- متریک القایی در ابرسطح فضا گونه در نمادگذاری چهار بعدی (حالت هموردای $x^\alpha = (t, y^i)$)

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + n_\alpha n_\beta \quad n_0 = -N \text{ و } n_i = 0 \tag{۷.۴}$$

$$h^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} + n^\alpha n^\beta \quad n^0 = g^{00} n_0 = N^{-1} \text{ و } n^i = g^{i0} n_0 = -N^i N^{-1} \tag{۸.۴}$$

- $h^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta + n^\alpha n_\beta$ (تانسور تصویر به ابرسطح در حالت هموردا)

$$h^\alpha_\beta n^\beta = 0 \qquad n^\beta \nabla_\alpha n_\beta = 0 \qquad \underbrace{n_{[\alpha} \nabla_\beta n_{\rho]} = 0}_{\text{قضیه‌ی فروبنیوس}} \tag{۹.۴}$$

مشتق هموردای D

بر تانسورهای ابرسطح اثر کرده و منجر به تانسورهایی در همین ابرسطح می‌شود.

مشتق همورداى D

بر تانسورهای ابرسطح اثر کرده و منجر به تانسورهایی در همین ابرسطح می‌شود.

- برای مؤلفه‌ی بردار $X^\beta \in \Sigma(t)$

$$D_\alpha X^\beta = h^\rho_\alpha h^\beta_\sigma \nabla_\rho X^\sigma \qquad (۱۰.۴)$$

مشتق همورداي D

بر تانسورهای ابرسطح اثر کرده و منجر به تانسورهایی در همین ابرسطح می‌شود.

- برای مؤلفه‌ی بردار $X^\beta \in \Sigma(t)$

$$D_\alpha X^\beta = h^\rho_\alpha h^\beta_\sigma \nabla_\rho X^\sigma \tag{۱۰.۴}$$

تانسور متقارن انحنای بیرونی $K_{\alpha\beta}$

اطلاعاتی از تغییر رویدادها بین ابرسطح‌ها را مشخص می‌کند.

مشتق هموردای D

بر تانسورهای ابرسطح اثر کرده و منجر به تانسورهایی در همین ابرسطح می‌شود.

- برای مؤلفه‌ی بردار $X^\beta \in \Sigma(t)$

$$D_\alpha X^\beta = h^\rho_\alpha h^\beta_\sigma \nabla_\rho X^\sigma \tag{۱۰.۴}$$

تانسور متقارن انحنای بیرونی $K_{\alpha\beta}$

اطلاعاتی از تغییر رویدادها بین ابرسطح‌ها را مشخص می‌کند.

- طبق تعریف :

$$K_{\alpha\beta} = -h^\rho_\alpha h^\sigma_\beta \nabla_\rho n_\sigma = -h^\rho_\alpha (\delta^\sigma_\beta + n^\sigma n_\beta) \nabla_\rho n_\sigma = -h^\rho_\alpha \nabla_\rho n_\beta \tag{۱۱.۴}$$

- از رابطه(۱۱.۴)

$$-\nabla_\alpha n_\beta = K_{\alpha\beta} + n_\alpha a_\beta \tag{۱۲.۴}$$

$$a_\beta = n^\rho \nabla_\rho n_\beta \quad \text{که در آن} \tag{۱۳.۴}$$

دسته معادلات گاوس-کودازی

روابطی بین انحنای فضا-زمان چهاربعدی و انحنای سه بعدی در ابرسطح $\Sigma(t)$ را مشخص می‌کنند.

دسته معادلات گاوس-کودازی

روابطی بین انحنای فضا-زمان چهاربعدی و انحنای سه بعدی در ابرسطح $\Sigma(t)$ را مشخص می‌کنند.

- با شروع از

$$\begin{aligned} -{}^{(3)}R_{\lambda\rho\alpha\beta}X^{\lambda} &= D_{\alpha}D_{\beta}X_{\rho} - D_{\beta}D_{\alpha}X_{\rho} \\ &= h^{\mu}_{\alpha}h^{\nu}_{\beta}h^{\sigma}_{\rho}\nabla_{\mu}(h^{\eta}_{\nu}h^{\tau}_{\sigma}\nabla_{\eta}X_{\tau}) - (\alpha \leftrightarrow \beta) \\ &= h^{\mu}_{\alpha}h^{\eta}_{\beta}h^{\tau}_{\rho}\nabla_{\mu}\nabla_{\eta}X_{\tau} - h^{\eta}_{\beta}n^{\tau}K_{\alpha\rho}\nabla_{\eta}X_{\tau} - (\alpha \leftrightarrow \beta) \end{aligned} \tag{۱۴.۴}$$

- چهار شکل از معادلات گاوس-کودازی

$$^{(3)}R_{\sigma\rho\alpha\beta} = h^{\lambda}_{\sigma}h^{\tau}_{\rho}h^{\mu}_{\alpha}h^{\eta}_{\beta}R_{\lambda\tau\mu\eta} - (K_{\sigma\alpha}K_{\rho\beta} - K_{\sigma\beta}K_{\rho\alpha}) \tag{۱۵.۴}$$

$$2n^{\alpha}n^{\beta}G_{\alpha\beta} = {}^{(3)}R + K^2 - K_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta} \tag{۱۶.۴}$$

$$h^{\lambda}_{\sigma}h^{\mu}_{\alpha}h^{\tau\eta}R_{\lambda\tau\mu\eta} = {}^{(3)}R_{\sigma\alpha} + K_{\sigma\alpha}K - K_{\sigma}{}^{\rho}K_{\rho\alpha} \tag{۱۷.۴}$$

$$h^{\lambda}_{\sigma}h^{\mu}_{\alpha}R_{\lambda\mu} + h^{\lambda}_{\sigma}h^{\mu}_{\alpha}n^{\tau}n^{\eta}R_{\lambda\tau\mu\eta} = {}^{(3)}R_{\sigma\alpha} + K_{\sigma\alpha}K - K_{\sigma}{}^{\rho}K_{\rho\alpha} \tag{۱۸.۴}$$

کنش گرانشی در فرم (۳+۱)

کنش گرانشی در فرم (۳+۱)

در کنش اینشتین-هیلبرت

$$S_{EH} = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}R \qquad (۱.۵)$$

$$\text{فرمول‌بندی (۳+۱)} \Rightarrow S_{EH} = S_{ADM} - 2\underbrace{\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\nabla_\alpha(a^\alpha + Kn^\alpha)}_{\text{انتگرال سطحی که کنار گذاشته می‌شود.}} \qquad (۲.۵)$$

کنش گرانشی در فرم (۳+۱)

در کنش اینشتین-هیلبرت

$$S_{EH} = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}R \tag{۱.۵}$$

$$\text{فرمول‌بندی (۳+۱)} \Rightarrow S_{EH} = S_{ADM} - 2\underbrace{\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\nabla_\alpha(a^\alpha + Kn^\alpha)}_{\text{انتگرال سطحی که کنار گذاشته می‌شود.}} \tag{۲.۵}$$

کنش S_{ADM}

کنش S_{ADM} برابر است با

$$S_{ADM} = \int \mathrm{d}t\mathrm{d}^3x\mathcal{L}_{ADM} \tag{۳.۵}$$

$$\text{با چگالی لاگرانژی} \quad \mathcal{L}_{ADM} = N\sqrt{h}\left({}^{(3)}R - K^2 + K_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta}\right) \tag{۴.۵}$$

- S_{ADM} به طور کامل در فرمالیسم (۳+۱) است.
- متغیرهای کنش ، h_{ij} و N_i و N هستند.
- مشتق زمانی N و N_i در کنش ظاهر نمی‌شوند

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{ADM}}{\partial \dot{N}} = \mathcal{P} = 0 \Rightarrow \mathcal{P} \approx 0 \text{ یک قید} \tag{۵.۵}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{ADM}}{\partial \dot{N}_i} = \mathcal{P}^i = 0 \Rightarrow \mathcal{P}^i \approx 0 \text{ سه قید} \tag{۶.۵}$$

- معادلات حرکت N و N_i (قیود **وابریختی**)

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{ADM}}{\partial N} = 0 \Rightarrow {}^{(3)}R + K^2 - K_{ij}K^{ij} \approx 0 \tag{۷.۵}$$

$$D_i\left(\frac{\partial \mathcal{L}_{ADM}}{\partial (D_i N_j)}\right) = 0 \Rightarrow D_i(K^{ij} - Kh^{ij}) \approx 0 \tag{۸.۵}$$

فرمول‌بندی (۳+۱) با ویل‌بین

- اندیس‌های μ ، ν ، ρ و ... برای پایه‌ی مختصاتی (خم) اعداد $(0,1,2,3)$
- اندیس‌های A ، B ، C و ... برای پایه‌ی غیر مختصاتی (تخت یا لورنتسی) اعداد $(0,1,2,3)$
- اندیس‌های i ، j ، k و ... برای پایه‌ی مختصاتی فضایی اعداد $(1,2,3)$
- اندیس‌های a ، b ، c و ... برای پایه‌ی غیر مختصاتی فضایی اعداد $(1,2,3)$
- ویل‌بین بالا مثلثی ${\hat{E}_\mu}^A$ و معکوس آن ${\hat{E}^\mu}_A$

$$ {\hat{E}_\mu}^A = \begin{bmatrix} N & N^i {e_i}^a \\ 0 & {e_i}^a \end{bmatrix} \qquad {\hat{E}^\mu}_A = \begin{bmatrix} N^{-1} & 0 \\ -N^i N^{-1} & {e^i}_a \end{bmatrix} \tag{۱.۶} $$

- ${e_i}^a$ و ${e^i}_a$ قسمت فضایی ویل‌بین و معکوس آن هستند

$$ \begin{aligned} {e_i}^a {e^i}_b = \delta^a_b \quad &, \quad {e_i}^a {e^j}_a = \delta^i_j \\ {e_i}^a {e_j}^b \eta_{ab} = h_{ij} \quad &, \quad {e^i}_a {e^j}_b h_{ij} = \eta_{ab} \\ {e^i}_a {e^j}_b \eta^{ab} = h^{ij} \quad &, \quad {e_i}^a {e_j}^b h^{ij} = \eta^{ab} \end{aligned} \tag{۲.۶} $$

- برای ویل‌بین بالا مثلثی و معکوس آن

$$\hat{E}_\mu{}^A \hat{E}^\mu{}_B = \delta^A_B \quad , \quad \hat{E}_\mu{}^A \hat{E}^\nu{}_A = \delta^\nu_\mu$$
$$\hat{E}_\mu{}^A \hat{E}_\nu{}^B \eta_{AB} = g_{\mu\nu} \quad , \quad \hat{E}^\mu{}_A \hat{E}^\nu{}_B\, g_{\mu\nu} = \eta_{AB}$$
$$\hat{E}^\mu{}_A \hat{E}^\nu{}_B \eta^{AB} = g^{\mu\nu} \quad , \quad \hat{E}_\mu{}^A \hat{E}_\nu{}^B\, g^{\mu\nu} = \eta^{AB} \tag{۳.۶}$$

- برای ویل‌بین بالا مثلثی و معکوس آن

$$\hat{E}_\mu{}^A \hat{E}^\mu{}_B = \delta^A_B \quad , \quad \hat{E}_\mu{}^A \hat{E}^\nu{}_A = \delta^\nu_\mu$$
$$\hat{E}_\mu{}^A \hat{E}_\nu{}^B \eta_{AB} = g_{\mu\nu} \quad , \quad \hat{E}^\mu{}_A \hat{E}^\nu{}_B \, g_{\mu\nu} = \eta_{AB}$$
$$\hat{E}^\mu{}_A \hat{E}^\nu{}_B \eta^{AB} = g^{\mu\nu} \quad , \quad \hat{E}_\mu{}^A \hat{E}_\nu{}^B \, g^{\mu\nu} = \eta^{AB} \tag{۳.۶}$$

رابطه‌ی کنش S_{ADM} بر حسب ویل‌بین

$$S = \int \mathrm{dtd}^3 x \mathcal{L} \tag{۴.۶}$$
$$\mathcal{L} = Ne\left({}^{(3)}R(e) - K^2 + K_{ij}K^{ij}\right) \tag{۵.۶}$$
$$K_{ij} = \frac{1}{2N}(D_i N_j + D_j N_i - \dot{e}_i{}^a e_{ja} - e_{ia}\dot{e}_j{}^a) \tag{۶.۶}$$

- برای ویل‌بین بالا مثلثی و معکوس آن

$$\hat{E}_\mu{}^A \hat{E}^\mu{}_B = \delta^A_B \quad , \quad \hat{E}_\mu{}^A \hat{E}^\nu{}_A = \delta^\nu_\mu$$
$$\hat{E}_\mu{}^A \hat{E}_\nu{}^B \eta_{AB} = g_{\mu\nu} \quad , \quad \hat{E}^\mu{}_A \hat{E}^\nu{}_B \, g_{\mu\nu} = \eta_{AB}$$
$$\hat{E}^\mu{}_A \hat{E}^\nu{}_B \eta^{AB} = g^{\mu\nu} \quad , \quad \hat{E}_\mu{}^A \hat{E}_\nu{}^B \, g^{\mu\nu} = \eta^{AB} \tag{۳.۶}$$

رابطه‌ی کنش S_{ADM} بر حسب ویل‌بین

$$S = \int \mathrm{d}t\mathrm{d}^3x \mathcal{L} \tag{۴.۶}$$

$$\mathcal{L} = Ne\big({}^{(3)}R(e) - K^2 + K_{ij}K^{ij}\big) \tag{۵.۶}$$

$$K_{ij} = \frac{1}{2N}(D_iN_j + D_jN_i - \dot{e}_i{}^a e_{ja} - e_{ia}\dot{e}_j{}^a) \tag{۶.۶}$$

- تکانه‌ی کانونیک $\pi^i{}_a$

$$\pi^i{}_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{e}_i{}^a} = 2ee_{ja}(Kh^{ij} - K^{ij}) \tag{۷.۶}$$

- سه قید

$$\tilde{M}_{ab} = e_{ia}\pi^{i}{}_{b} - e_{ib}\pi^{i}{}_{a} \qquad (۸.۶)$$

جبر لورنتس را برآورده می‌کنند

$$\{\tilde{M}_{ab}, \tilde{M}'_{cd}\} = (\eta_{ac}\tilde{M}_{bd} - \eta_{ad}\tilde{M}_{bc} + \eta_{bd}\tilde{M}_{ac} - \eta_{bc}\tilde{M}_{ad})\delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'} \qquad (۹.۶)$$

این سه قید مولد دوران بوده و جبر لورنتس به جبر مولدهای دوران تقلیل می‌یابد.

- اثبات رابطه‌ی (۳۷.۷) نیاز به روابط کروشه‌پواسون‌های اساسی دارد

$$\{e_{ia}, \pi'^{j}{}_{b}\} = \delta_i^j \eta_{ab}\delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'} \qquad (۱۰.۶)$$

$$\{e_{ia}, e'_{jb}\} = \{\pi^{i}{}_{a}, \pi'^{j}{}_{b}\} = 0 \qquad (۱۱.۶)$$

که در این روابط

$$e_{ia} = e_{ia}(\mathbf{x}) \quad , \quad e'_{jb} = e_{jb}(\mathbf{x}') \quad , \quad \delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

- با معکوس کردن رابطه‌ی (۷.۶)

$$K^i{}_j = \frac{1}{4e}(e_k{}^a \pi^k{}_a \delta^i_j - 2e_j{}^a \pi^i{}_a) \qquad (۱۲.۶)$$

- چگالی هامیلتونی $\mathcal{H} = \pi^i{}_a \dot{e}_i{}^a - \mathcal{L}$ با کنار گذاشتن جمله‌ی سطحی

$$\mathcal{H} = Ne\big(- {}^{(3)}R(e) - K^2 + K_{ij}K^{ij}\big) - 2eN_j D_i(Kh^{ij} - K^{ij}) \qquad (۱۳.۶)$$

- اضافه کردن ضرایبی از قیود اولیه‌ی $\tilde{M}_{ab}$ به چگالی هامیلتونی و استفاده از چگالی لاگرانژی

$$\tilde{\mathcal{L}} = \pi^i{}_a \dot{e}_i{}^a - (\mathcal{H} + \lambda^{ab}\tilde{M}_{ab}) \qquad (۱۴.۶)$$

کنش منجر می‌شود به

$$\tilde{S} = \int \mathrm{dtd}^3x(\pi^i{}_a \dot{e}_i{}^a - N\mathcal{C} - N_j\mathcal{C}^j - \lambda^{ab}\tilde{M}_{ab}) \qquad (۱۵.۶)$$

- در این رابطه

$$\mathcal{C} = e\big(- {}^{(3)}R(e) - K^2 + K_{ij}K^{ij}\big) \qquad (۱۶.۶)$$

$$\mathcal{C}^j = -2eD_i(Kh^{ij} - K^{ij}) \qquad (۱۷.۶)$$

- $\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}^j$ همان قیود وابرریختی هستند.

از ۱۶ مؤلفه‌ی میدان ویل‌بین $\hat{E}_\mu{}^A$ در فضای ۴ بعدی ، ۱۳ مؤلفه غیر صفرهستند.
در اینجا نوعی تثبیت پیمانه‌ای یا محدودیت برای ۳ مؤلفه داریم.
تقارن موضعی لورنتس به طور کامل دیده نمی‌شود.
فقط تقارن چرخشی لورنتس دیده می‌شود.

از ۱۶ مؤلفه‌ی میدان ویل‌بین ${\hat{E}_\mu}^A$ در فضای ۴ بعدی ، ۱۳ مؤلفه غیر صفرهستند.
در اینجا نوعی تثبیت پیمانه‌ای یا محدودیت برای ۳ مؤلفه داریم.
تقارن موضعی لورنتس به طور کامل دیده نمی‌شود.
فقط تقارن چرخشی لورنتس دیده می‌شود.

- شکل عمومی تبدیلات خیز

$$\Lambda(q)^A{}_B = \begin{bmatrix} \gamma & q_b \\ q^a & \delta^a{}_b + \frac{1}{1+\gamma} q^a q_b \end{bmatrix} \tag{۱۸.۶}$$

q^a ها مؤلفه‌های بردار سه بعدی با رابطه‌ی $\gamma = \sqrt{1 + q^a q_a}$ هستند.

- اثر تبدیلات خیز بر میدان ویل‌بین ${\hat{E}_\mu}^A$ منجر می‌شود به

$$ {E_\mu}^A = \Lambda(q)^A{}_B {\hat{E}_\mu}^B \tag{۱۹.۶}$$
میدان ویل‌بین با ۱۶ مؤلفه‌ی مستقل

$$\Rightarrow {E_\mu}^A = \begin{bmatrix} N\gamma + N^j {e_j}^c q_c & N q^a + N^j {e_j}^c ({\delta_c}^a + \frac{1}{1+\gamma} q_c q^a) \\ {e_i}^c q_c & {e_i}^c ({\delta_c}^a + \frac{1}{1+\gamma} q_c q^a) \end{bmatrix} \tag{۲۰.۶}$$

- مؤلفه‌های معکوس ویل‌بین

$$E^{\mu}{}_{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{N}\gamma & -\frac{1}{N}q_a \\ -\frac{N^i}{N}\gamma - q^c e^i{}_c & \frac{N^i}{N}q_a + e^i{}_c(\delta_a{}^c + \frac{1}{1+\gamma}q_a q^c) \end{bmatrix} \qquad (۲۱.۶)$$

- سه مؤلفه‌ی q^a (مؤلفه‌های خیز) در شکل عمومی ویل‌بین ظاهر می‌شوند.
- هر ۱۶ مؤلفه‌ی ویل‌بین برحسب ۱۶ میدان $e_i{}^a$، N، N^i و q^a تعریف می‌شوند.

- مؤلفه‌های معکوس ویل‌بین

$$E^{\mu}{}_{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{N}\gamma & -\frac{1}{N}q_a \\ -\frac{N^i}{N}\gamma - q^c e^i{}_c & \frac{N^i}{N}q_a + e^i{}_c(\delta_a{}^c + \frac{1}{1+\gamma}q_a q^c) \end{bmatrix} \quad (۲۱.۶)$$

- سه مؤلفه‌ی q^a (مؤلفه‌های خیز) در شکل عمومی ویل‌بین ظاهر می‌شوند.
- هر ۱۶ مؤلفه‌ی ویل‌بین برحسب ۱۶ میدان $e_i{}^a$، N، N^i و q^a تعریف می‌شوند.

کنش اینشتین-هیلبرت برحسب ویل‌بین

$$S_{EH} = \int \mathrm{d}^4x \mathcal{L}_{EH} \quad (۲۲.۶)$$

$$\mathcal{L}_{EH} = ER\,,\ R = \frac{1}{4}\Omega^{ABC}\Omega_{ABC} + \frac{1}{2}\Omega^{ABC}\Omega_{ACB} - \Omega_{AC}{}^{A}\Omega_{B}{}^{CB} \quad (۲۳.۶)$$

$$\Omega^{ABC} = E^{\mu A}E^{\nu B}\partial_{[\mu}E_{\nu]}{}^{C} \quad (۲۴.۶)$$

E دترمینان ویل‌بین $E_\mu{}^A$ و R اسکالر ریچی است.

طرح مسئله و حل آن

طرح مسئله و حل آن

طرح مسئله

سؤال : آیا در شکل بدون محدودیت میدان‌های ویل‌بین ، می‌توان تقارن موضعی لورنتس را به طور کامل مشاهده کرد؟

جواب قاعدتاً باید مثبت می‌بود و این امیدواری وجود داشت که این تقارن به‌طور کامل دیده شود. برای این منظور در صدد حل مسئله بر آمدم و در نهایت به نتیجه‌ی مورد نظر رسیدم. در این بخش روش حل مسئله را شرح می‌دهم.

طرح مسئله و حل آن

طرح مسئله

سؤال : آیا در شکل بدون محدودیت میدان‌های ویل‌بین ، می‌توان تقارن موضعی لورنتس را به طور کامل مشاهده کرد؟

جواب قاعدتاً باید مثبت می‌بود و این امیدواری وجود داشت که این تقارن به‌طور کامل دیده شود. برای این منظور در صدد حل مسئله بر آمدم و در نهایت به نتیجه‌ی مورد نظر رسیدم. در این بخش روش حل مسئله را شرح می‌دهم.

چگالی لاگرانژی

$$\mathcal{L}_{EH} = E\left(\frac{1}{4}\Omega^{ABC}\Omega_{ABC} + \frac{1}{2}\Omega^{ABC}\Omega_{ACB} - \Omega_{AC}{}^{A}\Omega_{B}{}^{CB}\right) \qquad (۱.۷)$$

که در آن

$$\begin{aligned}\Omega^{ABC} &= E^{\mu A}E^{\nu B}\partial_{[\mu}E_{\nu]}{}^{C}\\ &= \left(E^{\mu A}E^{\nu B} - E^{\nu A}E^{\mu B}\right)\partial_{\mu}E_{\nu}{}^{C} \qquad (۲.۷)\end{aligned}$$

با $N = 1$ و $N_i = 0$

$$E_\mu{}^A = \begin{bmatrix} \gamma & q^a \\ e_i{}^c q_c & e_i{}^a + \frac{1}{(\gamma+1)} e_i{}^c q_c q^a \end{bmatrix} \tag{۳.۷}$$

$$E^\mu{}_A = \begin{bmatrix} \gamma & -q_a \\ -e^i{}_c q_c & e^i{}_a + \frac{1}{(\gamma+1)} e^i{}_c q^c q_a \end{bmatrix} \tag{۴.۷}$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & h_{ij} \end{bmatrix} \tag{۵.۷}$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & h^{ij} \end{bmatrix} \tag{۶.۷}$$

$$E = e \tag{۷.۷}$$

با $N = 1$ و $N_i = 0$

$$E_\mu{}^A = \begin{bmatrix} \gamma & q^a \\ e_i{}^c q_c & e_i{}^a + \frac{1}{(\gamma+1)} e_i{}^c q_c q^a \end{bmatrix} \quad (۳.۷)$$

$$E^\mu{}_A = \begin{bmatrix} \gamma & -q_a \\ -e^i{}_c q_c & e^i{}_a + \frac{1}{(\gamma+1)} e^i{}_c q^c q_a \end{bmatrix} \quad (۴.۷)$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & h_{ij} \end{bmatrix} \quad (۵.۷)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & h^{ij} \end{bmatrix} \quad (۶.۷)$$

$$E = e \quad (۷.۷)$$

انتخاب حالت $N = 1$ و $N_i = 0$ حل مسئله را کمی ساده‌تر می‌کند اما خللی در هدف نهایی ایجاد نمی‌کند زیرا N و N_i فقط در تعیین قیود وابرریختی دستگاه نقش دارند.

برای تکانه‌ی همیوغ با $e_i{}^a$ یعنی $\pi^{i}{}_{a}$

$$\pi^{i}{}_{a} = \frac{\partial \mathcal{L}_{EH}}{\partial \dot{e}_i{}^a} = e\left(\frac{1}{2}\Omega_{ABC}\frac{\partial \Omega^{ABC}}{\partial(\partial_0 e_i{}^a)} + \Omega_{ACB}\frac{\partial \Omega^{ABC}}{\partial(\partial_0 e_i{}^a)} - 2\Omega_{B}{}^{CB}\frac{\partial \Omega_{AC}{}^{A}}{\partial(\partial_0 e_i{}^a)}\right) \quad (۸.۷)$$

برای تکانه‌ی همیوغ با $e_i{}^a$ یعنی $\pi^i{}_a$

$$\begin{aligned}\pi^i{}_a =& \frac{\partial \mathcal{L}_{EH}}{\partial \dot{e}_i{}^a} \\ =& e\left(\frac{1}{2}\Omega_{ABC}\frac{\partial \Omega^{ABC}}{\partial(\partial_0 e_i{}^a)} + \Omega_{ACB}\frac{\partial \Omega^{ABC}}{\partial(\partial_0 e_i{}^a)} - 2\Omega_B{}^{CB}\frac{\partial \Omega_{AC}{}^A}{\partial(\partial_0 e_i{}^a)}\right) \qquad (۸.۷)\end{aligned}$$

محاسبات بسیار مفصلی منجر می‌شود به

تکانه‌ی $\pi^i{}_a$

$$\begin{aligned}\pi^i{}_a = e\Big(&\partial_0 e^i{}_a - e^{ib}e^j{}_b\partial_0 e_{ja} + 2e^j{}_a e^i{}_b\partial_j q^b - 2e^i{}_a e^j{}_b\partial_j q^b + 2e^i{}_a e^j{}_b\partial_0 e_j{}^b \\ &- \frac{2}{\gamma(\gamma+1)}e^j{}_a q^c e^i{}_c q_b\partial_j q^b + \frac{2}{\gamma(\gamma+1)}e^i{}_a q^b e^j{}_b q_c\partial_j q^c\Big) \qquad (۹.۷)\end{aligned}$$

برای تکانه‌ی همیوغ با q_a یعنی k^a

$$
\begin{aligned}
k^a =& \frac{\partial \mathcal{L}_{EH}}{\partial \dot{q}_a} \\
=& e\left(\frac{1}{2}\Omega_{ABC}\frac{\partial \Omega^{ABC}}{\partial(\partial_0 q_a)} + \Omega_{ACB}\frac{\partial \Omega^{ABC}}{\partial(\partial_0 q_a)} - 2\Omega_B{}^{CB}\frac{\partial \Omega_{AC}{}^{A}}{\partial(\partial_0 q_a)}\right)
\end{aligned}
\tag{۱۰.۷}
$$

برای تکانه‌ی همیوغ با q_a یعنی k^a

$$k^a = \frac{\partial \mathcal{L}_{EH}}{\partial \dot{q}_a}$$
$$= e\left(\frac{1}{2}\Omega_{ABC}\frac{\partial \Omega^{ABC}}{\partial(\partial_0 q_a)} + \Omega_{ACB}\frac{\partial \Omega^{ABC}}{\partial(\partial_0 q_a)} - 2\Omega_B{}^{CB}\frac{\partial \Omega_{AC}{}^{A}}{\partial(\partial_0 q_a)}\right) \quad (۱۰.۷)$$

در اینجا نیز محاسبات مفصلی منجر می‌شود به

تکانه‌ی k^a

$$k^a = e\left(\frac{2}{\gamma(\gamma+1)}e^{ja}q_b\partial_j q^b + 2\partial_j e^{ja} - \frac{2}{\gamma(\gamma+1)}q^a e^j{}_b\partial_j q^b + 2e^{ja}e^k{}_b\partial_j e_k{}^b - \frac{2}{\gamma(\gamma+1)}q^a q^b\partial_j e^j{}_b - \frac{2}{\gamma(\gamma+1)}q^a q^b e^j{}_b e^k{}_c\partial_j e_k{}^c\right) \quad (۱۱.۷)$$

نمادگذاری‌های استفاده شده برای سهولت روابط

$$f(\mathbf{x},t) = f \qquad f(\mathbf{x}',t) = f' \tag{۱۲.۷}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'^{j}} = \partial'_j \tag{۱۳.۷}$$

$$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'} \tag{۱۴.۷}$$

نمادگذاری‌های استفاده شده برای سهولت روابط

$$f(\mathbf{x},t)=f \qquad f(\mathbf{x}',t)=f' \tag{۱۲.۷}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'^j}=\partial'_j \tag{۱۳.۷}$$

$$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')=\delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'} \tag{۱۴.۷}$$

برخی از روابط مهم برای تابع دلتای دیراک

$$\partial'_j\delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'}=-\partial_j\delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'} \tag{۱۵.۷}$$

$$f'\delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'}=f\delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'} \tag{۱۶.۷}$$

$$fg'\partial_j\delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'}=f\partial_j(g\delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'})=fg\partial_j\delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'}+f\partial_j g\delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'} \tag{۱۷.۷}$$

$$fg'\partial'_j\delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'}=-fg'\partial_j\delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'}=-fg\partial_j\delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'}-f\partial_j g\delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'} \tag{۱۸.۷}$$

کروشه‌پواسون‌های اساسی

$$\{e_i{}^a, \pi'^j{}_b\} = \delta_i^j \delta_b^a \delta_{\mathbf{xx}'} \tag{۱۹.۷}$$

$$\{e_{ia}, \pi'^{jb}\} = \delta_i^j \delta_a^b \delta_{\mathbf{xx}'} \tag{۲۰.۷}$$

$$\{e_{ia}, \pi'^j{}_b\} = \eta_{ab} \delta_i^j \delta_{\mathbf{xx}'} \tag{۲۱.۷}$$

$$\{e_i{}^a, \pi'^{jb}\} = \eta^{ab} \delta_i^j \delta_{\mathbf{xx}'} \tag{۲۲.۷}$$

$$\{q_a, k'^b\} = \delta_a^b \delta_{\mathbf{xx}'} \tag{۲۳.۷}$$

$$\{q_a, k'_b\} = \eta_{ab} \delta_{\mathbf{xx}'} \tag{۲۴.۷}$$

کروشه‌پواسون‌های منتج از کروشه‌پواسون‌های اساسی

$$\{e^i{}_a, \pi'^j{}_b\} = -e^i{}_b e^j{}_a \delta_{\mathbf{xx}'} \tag{۲۵.۷}$$
$$\{e, \pi'^i{}_a\} = e e^i{}_a \delta_{\mathbf{xx}'} \tag{۲۶.۷}$$
$$\{\partial_k e_i{}^a, \pi'^j{}_b\} = \delta_i^j \delta_b^a \partial_k \delta_{\mathbf{xx}'} \tag{۲۷.۷}$$
$$\{\partial'_k e'_i{}^a, \pi^j{}_b\} = -\delta_i^j \delta_b^a \partial_k \delta_{\mathbf{xx}'} \tag{۲۸.۷}$$
$$\{\partial_k e^i{}_a, \pi'^j{}_b\} = -\partial_k \left(e^i{}_b e^j{}_a\right) \delta_{\mathbf{xx}'} - e^i{}_b e^j{}_a \partial_k \delta_{\mathbf{xx}'} \tag{۲۹.۷}$$
$$\{\partial'_k e'^i{}_a, \pi^j{}_b\} = e^i{}_b e^j{}_a \partial_k \delta_{\mathbf{xx}'} \tag{۳۰.۷}$$
$$\{\partial_i q_a, k'_b\} = \eta_{ab} \partial_i \delta_{\mathbf{xx}'} \tag{۳۱.۷}$$
$$\{\partial'_i q'_a, k_b\} = -\eta_{ab} \partial_i \delta_{\mathbf{xx}'} \tag{۳۲.۷}$$

از رابطه‌ی تکانه‌ی ${\pi^i}_a$ سه قید پادمتقارن M_{ab} تعیین می‌شود

از رابطه‌ی تکانه‌ی ${\pi^i}_a$ سه قید پادمتقارن M_{ab} تعیین می‌شود

سه قید M_{ab}

$$
\begin{aligned}
M_{ab} &= \tilde{M}_{ab} + 2eu_{ab} \\
&\approx 0
\end{aligned}
\tag{۳۳.۷}
$$

که در آن

$$
\tilde{M}_{ab} = e_{ia}{\pi^i}_b - e_{ib}{\pi^i}_a
\tag{۳۴.۷}
$$

$$
u_{ab} = {e^i}_a \partial_i q_b - {e^i}_b \partial_i q_a + \frac{1}{\gamma(\gamma+1)} q_c \partial_i q^c \left({e^i}_b q_a - {e^i}_a q_b\right)
\tag{۳۵.۷}
$$

از رابطه‌ی تکانه‌ی ${\pi^i}_a$ سه قید پادمتقارن M_{ab} تعیین می‌شود

سه قید M_{ab}

$$M_{ab} = \tilde{M}_{ab} + 2eu_{ab} \approx 0 \tag{۳۳.۷}$$

که در آن

$$\tilde{M}_{ab} = e_{ia}{\pi^i}_b - e_{ib}{\pi^i}_a \tag{۳۴.۷}$$

$$u_{ab} = {e^i}_a \partial_i q_b - {e^i}_b \partial_i q_a + \frac{1}{\gamma(\gamma+1)} q_c \partial_i q^c \left({e^i}_b q_a - {e^i}_a q_b \right) \tag{۳۵.۷}$$

$\tilde{M}_{ab}$ جبر لورنتس را برآورده می‌کند.

$$\{\tilde{M}_{ab}, \tilde{M}'_{cd}\} = (\eta_{ac}\tilde{M}_{bd} - \eta_{ad}\tilde{M}_{bc} + \eta_{bd}\tilde{M}_{ac} - \eta_{bc}\tilde{M}_{ad})\delta_{\mathbf{xx'}} \tag{۳۶.۷}$$

از رابطه‌ی تکانه‌ی ${\pi^i}_a$ سه قید پادمتقارن M_{ab} تعیین می‌شود

سه قید M_{ab}

$$M_{ab} = \tilde{M}_{ab} + 2eu_{ab} \approx 0 \tag{۳۳.۷}$$

که در آن

$$\tilde{M}_{ab} = e_{ia}{\pi^i}_b - e_{ib}{\pi^i}_a \tag{۳۴.۷}$$

$$u_{ab} = {e^i}_a \partial_i q_b - {e^i}_b \partial_i q_a + \frac{1}{\gamma(\gamma+1)} q_c \partial_i q^c \left({e^i}_b q_a - {e^i}_a q_b\right) \tag{۳۵.۷}$$

$\tilde{M}_{ab}$ جبر لورنتس را برآورده می‌کند.

$$\{\tilde{M}_{ab}, \tilde{M}'_{cd}\} = (\eta_{ac}\tilde{M}_{bd} - \eta_{ad}\tilde{M}_{bc} + \eta_{bd}\tilde{M}_{ac} - \eta_{bc}\tilde{M}_{ad})\delta_{\mathbf{xx'}} \tag{۳۶.۷}$$

Padmanabhan, Thanu. Gravitation: foundations and frontiers. Cambridge University Press, 2010 .

Hinterbichler, Kurt, and Rachel A. Rosen. "Interacting spin-2 fields." Journal of High Energy Physics 2012, no. 7 (2012): 1-34.

با استفاده از روابط کروشه‌های پواسون و مقداری محاسبه می‌توان نشان داد که سه قید M_{ab} نیز قسمت فضایی جبر لورنتس (تقارن دورانی) را برآورده می‌کنند.

$$\{M_{ab}, M'_{cd}\} = (\eta_{ac}M_{bd} - \eta_{ad}M_{bc} + \eta_{bd}M_{ac} - \eta_{bc}M_{ad})\delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'} \qquad (۳۷.۷)$$

با استفاده از روابط کروشه‌های پواسون و مقداری محاسبه می‌توان نشان داد که سه قید M_{ab} نیز قسمت فضایی جبر لورنتس (تقارن دورانی) را برآورده می‌کنند.

$$\{M_{ab}, M'_{cd}\} = (\eta_{ac}M_{bd} - \eta_{ad}M_{bc} + \eta_{bd}M_{ac} - \eta_{bc}M_{ad})\delta_{\mathbf{xx}'} \qquad (۳۷.۷)$$

- قیود M_{ab} تابعی از q_a ها و مشتقات فضایی آنها هستند اما تابعی از تکانه‌های k^a نیستند و به طور مستقل قسمت فضایی جبر لورنتس را برآورده می‌کنند.

با استفاده از روابط کروشه‌های پواسون و مقداری محاسبه می‌توان نشان داد که سه قید M_{ab} نیز قسمت فضایی جبر لورنتس (تقارن دورانی) را برآورده می‌کنند.

$$\{M_{ab}, M'_{cd}\} = (\eta_{ac}M_{bd} - \eta_{ad}M_{bc} + \eta_{bd}M_{ac} - \eta_{bc}M_{ad})\delta_{\mathbf{xx'}} \qquad (۳۷.۷)$$

- قیود M_{ab} تابعی از q_a ها و مشتقات فضایی آنها هستند اما تابعی از تکانه‌های k^a نیستند و به طور مستقل قسمت فضایی جبر لورنتس را برآورده می‌کنند.
- تکانه‌های k^a در رابطه‌ی (۱۱.۷) تابعی از سرعت ها نیستند و باعث اعمال سه قید دیگر در مسئله می‌شوند.

با استفاده از روابط کروشه‌های پواسون و مقداری محاسبه می‌توان نشان داد که سه قید M_{ab} نیز قسمت فضایی جبر لورنتس (تقارن دورانی) را برآورده می‌کنند.

$$\{M_{ab}, M'_{cd}\} = (\eta_{ac}M_{bd} - \eta_{ad}M_{bc} + \eta_{bd}M_{ac} - \eta_{bc}M_{ad})\delta_{\mathbf{xx}'} \qquad (۳۷.۷)$$

- قیود M_{ab} تابعی از q_a ها و مشتقات فضایی آنها هستند اما تابعی از تکانه‌های k^a نیستند و به طور مستقل قسمت فضایی جبر لورنتس را برآورده می‌کنند.
- تکانه‌های k^a در رابطه‌ی (۱۱.۷) تابعی از سرعت ها نیستند و باعث اعمال سه قید دیگر در مسئله می‌شوند.
- قیود M_{ab} با هر ترکیبی از سه قید وابسته به تکانه‌های k^a نمی‌توانند جبر کامل لورنتس را برآورده کنند. به همین دلیل نیاز به باز تعریفی از قیود مسئله لازم به نظر می‌رسد.

از روابط تکانه‌های ${\pi^i}_a$ و k^a سه قید پادمتقارن L_{ab} تعیین می‌شود

از روابط تکانه‌های ${\pi^i}_a$ و k^a سه قید پادمتقارن L_{ab} تعیین می‌شود

سه قید L_{ab}

$$
\begin{aligned}
L_{ab} &= \tilde{L}_{ab} + 2v_{ab} \\
&\approx 0
\end{aligned}
\tag{۳۸.۷}
$$

که در آن

$$
\tilde{L}_{ab} = \tilde{M}_{ab} + q_a k_b - q_b k_a \tag{۳۹.۷}
$$

$$
v_{ab} = \partial_i \left(e \left(q_b {e^i}_a - q_a {e^i}_b \right) \right) \tag{۴۰.۷}
$$

از روابط تکانه‌های $\pi^i{}_a$ و k^a سه قید پادمتقارن L_{ab} تعیین می‌شود

سه قید L_{ab}

$$\begin{aligned} L_{ab} &= \tilde{L}_{ab} + 2v_{ab} \\ &\approx 0 \end{aligned} \tag{۳۸.۷}$$

که در آن

$$\tilde{L}_{ab} = \tilde{M}_{ab} + q_a k_b - q_b k_a \tag{۳۹.۷}$$

$$v_{ab} = \partial_i \left(e \left(q_b e^i{}_a - q_a e^i{}_b \right) \right) \tag{۴۰.۷}$$

به طور واضحی $\tilde{L}_{ab}$ جبر لورنتس را برآورده می‌کند.

$$\{\tilde{L}_{ab}, \tilde{L}'_{cd}\} = (\eta_{ac}\tilde{L}_{bd} - \eta_{ad}\tilde{L}_{bc} + \eta_{bd}\tilde{L}_{ac} - \eta_{bc}\tilde{L}_{ad})\delta_{\mathbf{xx'}} \tag{۴۱.۷}$$

با محاسبات نسبتاً مفصلی می‌توان نشان داد که سه قید L_{ab} نیز قسمت فضایی جبر لورنتس (تقارن دورانی) را برآورده می‌کنند.

$$\{L_{ab}, L'_{cd}\} = (\eta_{ac}L_{bd} - \eta_{ad}L_{bc} + \eta_{bd}L_{ac} - \eta_{bc}L_{ad})\delta_{\mathbf{xx'}} \tag{۴۲.۷}$$

با محاسبات نسبتاً مفصلی می‌توان نشان داد که سه قید L_{ab} نیز قسمت فضایی جبر لورنتس (تقارن دورانی) را برآورده می‌کنند.

$$\{L_{ab}, L'_{cd}\} = (\eta_{ac}L_{bd} - \eta_{ad}L_{bc} + \eta_{bd}L_{ac} - \eta_{bc}L_{ad})\delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'} \qquad (۴۲.۷)$$

از روابط تکانه‌های ${\pi^i}_a$ و k^a سه قید دیگر نیز تعیین می‌شود که با سه قید L_{ab} جبر لورنتس را به‌طور کامل برآورده می‌کنند.

از روابط تکانه‌های ${\pi^i}_a$ و k^a سه قید دیگر L_{0a} نیز تعیین می‌شوند

از روابط تکانه‌های $\pi^i{}_a$ و k^a سه قید دیگر L_{0a} نیز تعیین می‌شوند

سه قید L_{0a}

$$L_{0a} = \tilde{L}_{0a} + 2v_{0a} \approx 0 \tag{۴۳.۷}$$

که در آن

$$\tilde{L}_{0a} = \gamma k_a - \frac{1}{(\gamma+1)} q^e \tilde{M}_{ae} \tag{۴۴.۷}$$

$$v_{0a} = \partial_i \left(\frac{1}{(\gamma+1)} e q_a q^c e^i{}_c - \gamma e e^i{}_a \right) \tag{۴۵.۷}$$

از روابط تکانه‌های ${\pi^i}_a$ و k^a سه قید دیگر L_{0a} نیز تعیین می‌شوند

سه قید L_{0a}

$$L_{0a} = \tilde{L}_{0a} + 2v_{0a} \approx 0 \tag{۴۳.۷}$$

که در آن

$$\tilde{L}_{0a} = \gamma k_a - \frac{1}{(\gamma+1)} q^e \tilde{M}_{ae} \tag{۴۴.۷}$$

$$v_{0a} = \partial_i \left(\frac{1}{(\gamma+1)} e q_a q^c {e^i}_c - \gamma e {e^i}_a \right) \tag{۴۵.۷}$$

می توان نشان داد که برای $\tilde{L}_{0a}$ ها با یکدیگر و همچنین با $\tilde{L}_{ab}$ ها جبر لورنتس برقرار است.

$$\left\{ \tilde{L}_{0a}, \tilde{L}'_{0b} \right\} = -\tilde{L}_{ab} \delta_{\mathbf{xx'}} = \eta_{00} \tilde{L}_{ab} \delta_{\mathbf{xx'}} \tag{۴۶.۷}$$

$$\left\{ \tilde{L}_{0a}, \tilde{L}'_{cd} \right\} = \left(\eta_{ad} \tilde{L}_{0c} - \eta_{ac} \tilde{L}_{0d} \right) \delta_{\mathbf{xx'}} \tag{۴۷.۷}$$

همچنین با محاسبات مفصلی می‌توان نشان داد که برای قیود L_{0a} با یکدیگر و همچنین با قیود L_{ab} نیز جبر لورنتس برقرار است.

همچنین با محاسبات مفصلی می‌توان نشان داد که برای قیود L_{0a} با یکدیگر و همچنین با قیود L_{ab} نیز جبر لورنتس برقرار است.

$$\left\{L_{0a}, L'_{0b}\right\} = -L_{ab}\delta_{\mathbf{xx}'} = \eta_{00}L_{ab}\delta_{\mathbf{xx}'} \qquad (۴۸.۷)$$

$$\left\{L_{0a}, L'_{cd}\right\} = \left(\eta_{ad}L_{0c} - \eta_{ac}L_{0d}\right)\delta_{\mathbf{xx}'} \qquad (۴۹.۷)$$

همچنین با محاسبات مفصلی می‌توان نشان داد که برای قیود L_{0a} با یکدیگر و همچنین با قیود L_{ab} نیز جبر لورنتس برقرار است.

$$\left\{L_{0a}, L'_{0b}\right\} = -L_{ab}\delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'} = \eta_{00}L_{ab}\delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'} \tag{۴۸.۷}$$

$$\left\{L_{0a}, L'_{cd}\right\} = \left(\eta_{ad}L_{0c} - \eta_{ac}L_{0d}\right)\delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'} \tag{۴۹.۷}$$

روابط (۴۱.۷) ، (۴۸.۷) و (۴۹.۷) نشان می‌دهد که برای ۶ قید پادمتقارن L_{AB} جبر لورنتس به‌طور کامل برقرار است.

همچنین با محاسبات مفصلی می‌توان نشان داد که برای قیود L_{0a} با یکدیگر و همچنین با قیود L_{ab} نیز جبر لورنتس برقرار است.

$$\left\{L_{0a}, L'_{0b}\right\} = -L_{ab}\delta_{\mathbf{xx'}} = \eta_{00}L_{ab}\delta_{\mathbf{xx'}} \tag{۴۸.۷}$$

$$\left\{L_{0a}, L'_{cd}\right\} = \left(\eta_{ad}L_{0c} - \eta_{ac}L_{0d}\right)\delta_{\mathbf{xx'}} \tag{۴۹.۷}$$

روابط (۴۱.۷) ، (۴۸.۷) و (۴۹.۷) نشان می‌دهد که برای ۶ قید پادمتقارن L_{AB} جبر لورنتس به‌طور کامل برقرار است.

$$\{L_{AB}, L'_{CD}\} = (\eta_{AC}L_{BD} - \eta_{AD}L_{BC} + \eta_{BD}L_{AC} - \eta_{BC}L_{AD})\delta_{\mathbf{xx'}} \tag{۵۰.۷}$$

همچنین با محاسبات مفصلی می‌توان نشان داد که برای قیود L_{0a} با یکدیگر و همچنین با قیود L_{ab} نیز جبر لورنتس برقرار است.

$$\left\{L_{0a}, L'_{0b}\right\} = -L_{ab}\delta_{\mathbf{xx}'} = \eta_{00}L_{ab}\delta_{\mathbf{xx}'} \tag{۴۸.۷}$$

$$\left\{L_{0a}, L'_{cd}\right\} = \left(\eta_{ad}L_{0c} - \eta_{ac}L_{0d}\right)\delta_{\mathbf{xx}'} \tag{۴۹.۷}$$

روابط (۴۱.۷) ، (۴۸.۷) و (۴۹.۷) نشان می‌دهد که برای ۶ قید پادمتقارن L_{AB} جبر لورنتس به‌طور کامل برقرار است.

$$\{L_{AB}, L'_{CD}\} = (\eta_{AC}L_{BD} - \eta_{AD}L_{BC} + \eta_{BD}L_{AC} - \eta_{BC}L_{AD})\delta_{\mathbf{xx}'} \tag{۵۰.۷}$$

در واقع برقراری رابطه‌ی (۵۰.۷) همان نتیجه‌ای است که هدف اصلی مسئله را برآورده می‌کند.

در اینجا حل مسئله در حالت $N = 1$ و $N_i = 0$ توضیح داده شد. در حال حاضر در حال حل مسئله با N و N_i بدون هیچ شرط خاصی هستم. مسئله در حال تکمیل شدن است و به نتایج خوبی رسیده‌ام. حل مسئله در این حالت مفصل‌تر بوده و دشواری‌های بیشتری دارد. در این حالت قیود وابرریختی نیز تعیین شده و برقراری جبر پوانکاره برای ۶ قید L_{AB} و چهار قید وابرریختی نتیجه‌ای است که انتظار آن می‌رود.

پایان